Teoretická část - 14.6.2022

1. (a) Definujte prostory $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (konvergenci v těchto prostorech definovat nemusíte) $(1,5$ bodu).

   (b) Definujte Fourierovu transformaci a inverzní Fourierovu transformaci pro funkce z $L^1(\mathbb{R}^d)$. Definujte konvoluci funkcí z $L^1(\mathbb{R}^d)$ $(1,5$ bodu).

   (c) Zformulujte větu o Fourierově transformaci na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (1 bod).

   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

      i. $f \in L^1(\mathbb{R})$,

      ii. $f * g \in L^1(\mathbb{R})$,

      iii. $f * g = g * f$,

      iv. je-li $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, potom $f * g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

      v. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\mathcal{F}(g) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)g$,

      vi. je-li $\phi \in L^1$ a $\mathcal{F}(\phi) \in L^1$, potom platí
      $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi))f = \int_{-\infty}^{\infty} \phi f.$$

      Vše řádně zdůvodněte $(4,5$ bodu).

2. (a) Definujte Laurentovu řadu a reziduum (včetně rezidua v nekonečnu) $(1,5$ bodu).

   (b) Definujte singularity holomorfních funkcí (stačí v konečných bodech) a zformulujte větu o charakterizaci typů singularit $(2,5$ bodu).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otevřenou a $f, g \in H(\Omega)$ mající v bodě a izolovanou singularitu:

      i. je-li $U(a,1,2) \subset \Omega$ a $f = g$ na $U(a,0,1)$, potom f a g mají stejnou Laurentovu řadu na $U(a,1,2)$.

      ii. je-li $U(a,1,2) \subset \Omega$ a $f = g$ na množině
      $$\{z \in U(a,1,2) : \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(a)\},$$
      potom f a g mají stejnou Laurentovu řadu na $U(a,1,2)$.

      iii. má-li f v bodě a odstranitelnou singularitu, potom $\mathrm{Res}(f,a) \neq 0$,

      iv. má-li f v bodě a pól, potom $\mathrm{Res}(f,a) \neq 0$,

      v. má-li f v bodě a podstatnou singularitu, potom $\mathrm{Res}(f,a) \neq 0$.

   Vše řádně zdůvodněte (4 body).

3. (a) Definujte prostory $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\mathcal{D}'(\Omega)$ a konvergenci na nich (2 body).

   (b) Definujte posunutí, škálování, derivaci a nísobení funkcí v $\mathcal{D}'(\Omega)$ (2 body).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro posloupnost $\{T_n\} \subset D'(\mathbb{R})$ a distribuci $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

      i. je-li T regulární, potom je T' regulární,

      ii. je-li $\langle e^x T, \varphi \rangle = 0$, pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, potom $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

      iii. je-li $\langle xT, \varphi \rangle = 0$, pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, potom $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

      iv. pokud $T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T$, potom $T_n'' \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T''$,

      v. pokud $T_n'' \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T''$, potom $T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} T$,

      vi. je-li $f \in L^1_{loc}$ a T_f regulární distribuce reprezentující f, potom $s_{\frac{1}{3}} T_f = T_{s_{\frac{1}{3}} f}$.

   Vše řádně zdůvodněte (4 body).